強制法入門 1.1 版

鏡 弘道

2006 年 12 月 11 日

目次

1 準備

本論の目的は極力少ない予備知識で理解可能なように強制法の初歩を証明つきで説明し, その最初の応用として「連続体仮説の否定は ZFC と矛盾しない」という事実を記述することである. 強制法の初歩を証明つきで解説した日本語の文献が余り見当たらないことも本論を記述した動機の一つである.

共終数の概念さえ理解していれば, 大学三年次程度の知識で理解可能であるように記述したつもりである. 誤り等のご指摘や問題点・感想等については kagami@evariste.que.ne.jp まで連絡して頂ければ幸いである. 内容に関しては [1],[2] を参考にした. 証明について参考文献の内容を実質そのまま引用した部分もある. ただ

し個々の該当箇所で引用を明記することは行っていない．本論に書かれている内容は, 強制法の本当の初歩である．本論を読まれてた後さらに強制法について学習する場合, 巻末の参考文献 [1], [2] を強く推薦する．

本論においてはすべての論議を強制関係と Generic-標準名称に関する議論のみで記述するように構成した．従っていくつかの例外を除き, 超数学的に微妙な点をほとんど避けて通ることができたと思う．最初に強制法を学習した時の印象として, Generic-拡大を使用する正当性に関してかなり悩んだ経験があるので上記の構成を採用したのである．それにもかかわらず Generic-拡大は極めて重要な概念であるので, さらに学習される場合その正当性を含めた超数学的な考察を避けて通ることは不可能である．それらに関するきちんとした記述についても参考文献 [1], [2] を参照されたい．

本論で集合論という場合 ZFC の体系のことを意味し, 最低限 ZFC の公理系と順序数・濃度の基礎, ツォルンの補題程度の知識を仮定する．さらに順序数の共終数 (cofinality) の概念, 正則・特異基数に関するごく基本的な知識も仮定する．モデルの拡大とそれに関する「論理式の絶対性」の概念を知っていた方が読みやすいと思う．フィルターに関してはきちんと定義するが, これに関しても位相構造や一様構造と関連した収束に関する直感がある方が読みやすいと思う．

基本的にすべての定理に証明を付けたが, 「デルタシステムレンマ」のみは証明抜きで引用した．この結果については付録に記す．また Generic-拡大は極めて重要な概念であるが, 本論において以降の議論で使用しないので, 証明なしで簡単に引用するにとどめた．

言語と論理体系は述語記号として $=, \in$ を持つ一階述語論理を使用する．自由変数と束縛変数を記号上区別することはない．論理記号は $\wedge, \neg, \forall$ のみを正式なものとして採用する．これは論理式の数に関する帰納法を簡単にするためである．

まず準備として半順序集合・稠密な部分集合・フィルターについて記述する．

定義 1.1 (半順序集合)**.** 集合 $\mathbb{P}$ 上の関係 $\leq$ が次の条件を満たすとき半順序関係と呼び $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ と記述する．

$$\forall p \in \mathbb{P}(p \leq p) \tag{1.1}$$

$$\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leq q \wedge q \leq p \rightarrow p = q) \tag{1.2}$$

$$\forall p, q, r \in \mathbb{P}(p \leq q \wedge q \leq r \rightarrow p \leq r) \tag{1.3}$$

さらに $1 \in \mathbb{P}$ が $\forall p \in \mathbb{P}(p \leq 1)$ を満たすとき, これを $\mathbb{P}$ の最大元と呼び, 最大元も考慮した構造を $\langle \mathbb{P}, \leq, 1 \rangle$ と記述する[*1]．本論で、半順序集合は常に最大元 1 を持ち、最小元は持たないこととする．

定義 1.2 (稠密な部分集合と dense below p)**.** 順序集合 $\mathbb{P}$ の部分集合 D は $\forall p \in \mathbb{P} \exists d \in D(d \leq p)$ を満たすとき稠密 *(dense)* であると称する．また $p \in \mathbb{P}$ に対し D が $\forall q \leq p \exists d \in D(d \leq q)$ を満たすとき D は p の下で稠密 *(dense below* p*)* であると呼ぶ。

定義 1.3. $\mathbb{P}$ 半順序集合とする．$p, q \in \mathbb{P}$ が $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$ を満たすとき p, q は *compatible* であると言い $p \parallel q$ と書く．そうでないとき p, q は *incompatible* であると言い $p \perp q$ と書く．$\mathbb{P}$ の部分集合 X が反鎖 *(antichain)* であるとは, X の任意の二元が *incompatible* であることとする．

---

*1 混乱の恐れがない場合単に $\mathbb{P}$ と記述する．逆に混乱の恐れがある場合 $\leq, 1$ をそれぞれ $\leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}}$ と記述する．

定義 1.4 (フィルター)**.** $F \subset \mathbb{P}$ がフィルターであるとは次の条件を満たすこと.

$$F \neq \emptyset, F \neq \mathbb{P} \tag{1.4}$$

$$\forall p, q \in F \exists r \in F (r \leq p \wedge r \leq q) \tag{1.5}$$

$$\forall p \in F \forall q \in \mathbb{P} (p \leq q \rightarrow q \in F) \tag{1.6}$$

(1.4) の定義において $F \neq \emptyset$ は $1 \in F$ と同等である。さらに $\mathbb{P}$ に最小元 0 が存在する場合, $F \neq \mathbb{P}$ は $0 \notin F$ と同等である.

2 Generic について

定義 2.1. M を ZFC の推移的なモデルとし $\langle \mathbb{P}, \leq, 1 \rangle \in M$ を最大元 1 をもつ半順序集合, $G \subset \mathbb{P}$ をフィルターとする. G が M 上 $\mathbb{P}$-*generic* とは次の条件を満たすことである.

$$D \subset \mathbb{P} \text{ が } \mathbb{P} \text{ で稠密かつ } D \in M \text{ のとき } G \cap D \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

定理 2.1. M を推移的な ZFC の可算モデルとするとき, 任意の半順序集合 $\mathbb{P} \in M$ に対し $\mathbb{P}$-*generic* が存在する.

証明. $(D_n)_{n \in \omega}$ を $\mathbb{P}$ の稠密な部分集合で M の要素となるものの数え上げとする. まず $p_0 \in D_0$ を任意に選択し, $p_{n+1} \in D_{n+1}$ を $p_{n+1} \leq p_n$ となるように帰納的に選択すると $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega (p_n \leq q)\}$ は $\mathbb{P}$-generic の性質を満たす. □

ここで ZFC の推移的な可算モデル M が存在すると仮定して, 簡単に generic のご利益を述べたいと思う. まず集合 $\mathbb{P} = \{p : p \text{ is a function from a finite subset of } \omega \text{ to } 2\}$ を考え $p \leq q \leftrightarrow q \subset p$ により順序を導入する. G を $\mathbb{P}$-generic として $f = \bigcup G$ とする. このとき次の事実が成り立つ.

$$f \text{ is a function from } \omega \text{ to } 2 \tag{2.2}$$

$$f \notin M \tag{2.3}$$

f が ω の部分集合からの関数となるのは G がフィルターである帰結である. さらに (2.2) は
$D_n = \{d \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(d)\}$ とすると $D_n \in M$ で D_n は $\mathbb{P}$ で稠密. 従って $G \cap D_n \neq \emptyset$ であることにより得られる. もし $f \in M$ であると仮定すると $E = \{d \in \mathbb{P} : \exists n \in \mathrm{dom}(d)(f(n) \neq d(n))\}$ は M の要素となり $\mathbb{P}$ で稠密. 従って $G \cap E \neq \emptyset$ となるが, これは f の定義に反する.

f は ω から 2 への関数なので実数と解釈出来る. ところが $f \notin M$ なので M の世界からみると「存在しない」もしくは「仮想」の実数という感じになる. さらに M に G を「添加した拡大」$M[G]$ を考えることが出来, $M[G] \vDash \mathrm{ZFC}$ が成立する. つまりあたかも実数体に虚数単位 i を添加した代数拡大体, 即ち複素数体のごとく元のモデルに新しい実数を添加した ZFC のモデルの拡大が得られるのである.

ところで M が可算でない場合 generic 自体が (V にも) 存在しない場合が多い. さらにゲーデルの第二不完全性定理と完全性定理により, 集合論の可算モデルの存在は ZFC から証明出来ないという事情がある. 従って generic という概念を使用することに対する論理的な整合性に関して疑問が生じる訳であるが, 実際には ZFC の有限個の公理に対する可算モデルが存在する (付録 10.3「反映の原理」参照のこと). また具体的な論理式を証明したい場合, その証明に使用される公理は有限個である. 従ってそれら有限個の公理を満たす可算モデルを考えれば, Generic の使用に関する整合性は保証される.

強制法 (forcing) は元のモデル上で上述の $M[G]$ のような仮想的な対象を「近似」する手法である．連続体仮説の ZFC からの独立性の証明は, 適当な半順序集合 $\mathbb{P}$ 上の generic G を考え, $M[G]$ 上で連続体仮説が成立しないことを示すことにより得られる[*2].

3 forcing(強制法) の定義

本節では M を ZFC の推移的なモデル, $\mathbb{P} \in M$ を半順序集合とし $\mathbb{P}$ の要素を forcing notion と呼び, M と $\mathbb{P}$ により $\mathbb{P}$-名称なるものを定義する[*3]．今 $p \in \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n$, さらに集合論の言語に属する論理式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が与えられたとき, 強制関係

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)$$

を定義するのが本節の目標である．まず $\mathbb{P}$-名称を $\in$-induction により定義する．$\mathbb{P}$-名称を表す場合, ドット記号を文字の上に付ける場合が多い.

定義 3.1 ($\mathbb{P}$-名称)**.** $\mathbb{P}$-名称を元のモデル M の rank に関する帰納法で定義する.

$$\emptyset \text{ は } \mathbb{P}\text{-名称}$$
$$\dot{u} \text{ が } \mathbb{P}\text{-名称であるとは,} \dot{u} \text{ は関係であり } \forall \langle \dot{x}, p\rangle \in \dot{u} (\dot{x} \text{ は } \mathbb{P}\text{-名称} \wedge p \in \mathbb{P})$$

$\dot{x}$ を $\mathbb{P}$-名称 とするとき, $\mathrm{dom}(\dot{x})$ は通常の関係の domain の定義通りである．即ち
$\mathrm{dom}(\dot{x}) = \{\dot{y} : \exists p \in \mathbb{P}(\langle \dot{y}, p\rangle \in \dot{x})\}$．$\mathbb{P}$-名称全体からなる M で定義可能なクラスを $M^{\mathbb{P}}$ と記述する．文脈上明白な場合 $\mathbb{P}$-名称を単に名称と呼ぶ場合も多い．ここで M の要素と同一視可能な名称を標準名称として定義する.

定義 3.2 (標準名称)**.** *$X \in M$ に対し $\check{X} = \{\langle \check{x}, 1\rangle : x \in X\}$ を X の標準名称と言う.*

クラス M から $\mathbb{P}$-標準名称全体のクラス $M^{\mathbb{P}}$ への関数 $j(x) = \check{x}$ は一対一となる．従って M の要素とその標準名称を同一視する場合がある.

いよいよ forcing を定義する準備ができた.

定義 3.3 (forcing)**.** *M を集合論の推移的なモデルとし $\langle \mathbb{P}, \leq, 1\rangle \in M$ を半順序集合とする．また $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と記述した場合, φ は自由変数のすべてが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のいずれかである論理式する[*4]. $p \in \mathbb{P}$ と名称 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n \in M^{\mathbb{P}}$ に対し $p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)$ (「p は φ を強制する」と読む.) を論理式の記号の数に関する帰納法で定義する．尚, 定義中もしくは以降の記述において $p \nVdash \varphi$ は $\neg(p \Vdash \varphi)$ の意味である.*

[*2] ただし本論では $M[G]$ に関する議論を迂回し, 強制法と Generic-標準名称の使用のみで「連続体仮説の否定の無矛盾性」の証明を行う.
[*3] 本論の範囲では $M = V$ と考えても十分である.
[*4] 単に $\varphi, \varphi(x)$ 等記述した場合、他の自由変数を含む可能性がある．この辺りの記法に関しては文脈依存で判断されたい.

$$\forall\langle\dot{x},r\rangle\in\dot{X}(\{q:q\leq r\rightarrow\exists\langle\dot{y},s\rangle\in\dot{Y}(q\leq s\wedge q\Vdash\dot{x}=\dot{y})\}\ \textit{is dense below}\ p)$$

を$\dot{X}\subset_p\dot{Y}$と記述するとき

$$p\Vdash\dot{X}=\dot{Y}\equiv\dot{X}\subset_p\dot{Y}\wedge\dot{Y}\subset_p\dot{X}\tag{3.1}$$

$$p\Vdash\dot{x}\in\dot{X}\equiv\{q:\exists\langle\dot{y},r\rangle\in\dot{X}(q\leq r\wedge q\Vdash\dot{x}=\dot{y})\}\ \textit{is dense below}\ p\tag{3.2}$$

$$p\Vdash\varphi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)\wedge\psi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)\equiv p\Vdash\varphi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)\wedge p\Vdash\psi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)\tag{3.3}$$

$$p\Vdash\neg\varphi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)\equiv\forall q\leq p(q\nVdash\varphi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n))\tag{3.4}$$

$$p\Vdash\forall x(\varphi(x,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n))\equiv\forall\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}(p\Vdash\varphi(\dot{x},\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n))\tag{3.5}$$

定理 3.1.

$$p\Vdash\varphi\leftrightarrow(\{q:q\Vdash\varphi\}\ \textit{is dense below}\ p)\tag{3.6}$$

$$p\Vdash\varphi\rightarrow\forall q\leq p(q\Vdash\varphi)\tag{3.7}$$

$$p\Vdash\varphi\vee\psi\leftrightarrow\{q:q\Vdash\varphi\vee q\Vdash\psi\}\ \textit{is dense below}\ p\tag{3.8}$$

$$p\Vdash\exists x(\varphi)\leftrightarrow\{q\in\mathbb{P}:\exists\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}(q\Vdash\varphi)\}\ \textit{is dense below}\ p\tag{3.9}$$

$$(p\Vdash\varphi\rightarrow\psi)\leftrightarrow\forall q\leq p(q\Vdash\varphi\rightarrow q\Vdash\psi)\tag{3.10}$$

証明. (3.6) を証明するには, まず $D\subset\mathbb{P}$ とし $\{r\in\mathbb{P}:D$ is dense below $r\}$ is dense below p が成立するとき D is dense below p であることに注意すると, $p\Vdash\dot{x}\in\dot{X},p\Vdash\dot{X}=\dot{Y}$ の場合に (3.6) が成立する. 一般の場合は論理式の数に関する帰納法による.

(3.7) は dense below p の定義と (3.6) よりただちに得られる.

(3.8) は論理式の次の変形により得られる.

$$\begin{gathered}p\Vdash\varphi\vee\psi\leftrightarrow p\Vdash\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\leftrightarrow\forall q\leq p(\neg(q\Vdash\neg\varphi\wedge q\Vdash\neg\psi))\\ \leftrightarrow\neg\exists q\leq p(q\Vdash\neg\varphi\wedge q\Vdash\neg\psi)\leftrightarrow\neg\exists q\leq p(\forall r\leq q(r\nVdash\varphi)\wedge\forall r\leq q(r\nVdash\psi))\\ \leftrightarrow\neg\exists q\leq p\forall r\leq q(r\nVdash\varphi\wedge r\nVdash\psi)\leftrightarrow\forall q\leq p\exists r\leq q(r\Vdash\varphi\vee r\Vdash\psi)\\ \leftrightarrow\{r:r\Vdash\varphi\vee r\Vdash\psi\}\text{ is dense below }p\end{gathered}$$

(3.9) も同様に次の論理式の変形により得られる.

$$\begin{gathered}p\Vdash\exists x(\varphi)\leftrightarrow p\Vdash\neg\forall x(\neg\varphi)\leftrightarrow\forall q\leq p(q\nVdash\forall x(\neg\varphi))\leftrightarrow\neg\exists q\leq p(q\Vdash\forall x(\neg\varphi))\\ \leftrightarrow\neg\exists q\leq p\forall\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}(q\Vdash\neg\varphi)\leftrightarrow\neg\exists q\leq p\forall\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}\forall r\leq q(r\nVdash\varphi)\\ \leftrightarrow\neg\exists q\leq p\forall r\leq q\forall\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}(r\nVdash\varphi)\leftrightarrow\forall q\leq p\exists r\leq q\exists\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}(r\Vdash\varphi)\\ \leftrightarrow\{q\in\mathbb{P}:\exists\dot{x}\in M^{\mathbb{P}}(q\Vdash\varphi)\}\text{ is dense below }p\end{gathered}$$

(3.10) に関しても次のように証明できる. まず $(p\Vdash\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\forall q\leq p(q\Vdash\varphi\rightarrow q\Vdash\psi)$ を示す. $p\Vdash\varphi\rightarrow\psi$ を仮定し, さらに $q\leq p$ が存在して $q\Vdash\varphi\wedge q\nVdash\psi$ を仮定し矛盾を導く. 実際 $p\Vdash\varphi\rightarrow\psi$ なので $q\Vdash\varphi\rightarrow\psi$. さらに次の論理式の変形が得られる.

$$\begin{gathered}q\Vdash(\varphi\rightarrow\psi)\leftrightarrow q\Vdash\neg\varphi\vee\psi\\ \leftrightarrow\{r\leq q:r\Vdash\neg\varphi\vee r\Vdash\psi\}\text{ is dense below }q\\ \leftrightarrow\forall r\leq q\exists s\leq r(s\Vdash\neg\varphi\vee s\Vdash\psi)\end{gathered}$$

ところが $q\Vdash\varphi$ なので最後の部分の $s\Vdash\neg\varphi$ は決して成立しない. 従って $\forall r\leq q\exists s\leq r(s\Vdash\psi)$ が成り立つが, これは $q\Vdash\psi$ を意味し矛盾である.

逆に $p \not\Vdash \varphi \to \psi$ を仮定すると次の論理式の変形が得られる.

$$\begin{aligned} p \not\Vdash (\varphi \to \psi) &\leftrightarrow p \not\Vdash \neg\varphi \vee \psi \leftrightarrow \{q \le p : q \Vdash \neg\varphi \vee \psi\} \text{ is not dense below } p \\ &\leftrightarrow \exists q \le p \forall r \le q (r \not\Vdash \neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists q \le p (q \Vdash \varphi \wedge \neg\psi) \\ &\leftrightarrow \exists q \le p (q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi) \to \exists q \le p (q \Vdash \varphi \wedge q \not\Vdash \psi) \end{aligned}$$

従って $\neg\forall q \le p (q \Vdash \varphi \to q \Vdash \psi)$. □

注意 3.1. 例えば $p \Vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow p \Vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ の部分の変形において, 暗黙に同値な論理式が強制関係の同値を引き起こすことを使用しているようであるが, $\varphi \vee \psi$ が $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ の省略記法である体系であれば全く問題は生じないし, そうでない場合でも上記定理の証明では強制関係での $\wedge$ 結合の部分論理式における φ と $\neg\neg\varphi$ の置換しか使用していない. その場合問題が生じないのはほとんど明白である. そしてひとたび *(3.10)* が証明されれば, 一般に強制関係で「同値な論理式」の置換は許されることが分かる.

注意 3.2. 本節の定義のように, 強制関係は ZFC 内で定義可能な論理式であることが重要である. 一見「一般の論理式」という超数学的な概念を使用するようであるが, これらは適当なコード化により ZFC 内で表現することが可能なのである.

4　強制法における等号の性質

強制法において等号は「良い」性質をもつ.

定理 4.1 (強制法における等号の基本性質)**.**

$$1 \Vdash \dot{X} = \dot{X} \tag{4.1}$$

$$1 \Vdash (\dot{X} = \dot{Y} \to \dot{Y} = \dot{X}) \tag{4.2}$$

$$1 \Vdash (\dot{X} = \dot{Y} \wedge \dot{Y} = \dot{Z} \to \dot{X} = \dot{Z}) \tag{4.3}$$

$$1 \Vdash (\dot{x} \in \dot{X} \wedge \dot{X} = \dot{Y} \to \dot{x} \in \dot{Y}) \tag{4.4}$$

$$1 \Vdash (\dot{x} \in \dot{X} \wedge \dot{x} = \dot{y} \to \dot{y} \in \dot{X}) \tag{4.5}$$

証明. (4.1) は定義より簡単に分かる.

(4.2) は一般に $1 \Vdash \varphi \leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}(p \Vdash \varphi)$ が成立することに注意すると, $p \in \mathbb{P}$ に対し
$p \Vdash \dot{X} = \dot{Y} \to p \Vdash \dot{Y} = \dot{X}$ を示せば良いが, これも定義により明らかである.

(4.3) を示すには $p \Vdash \dot{X} = \dot{Y} \wedge p \Vdash \dot{Y} = \dot{Z} \to p \Vdash \dot{X} = \dot{Z}$ を示せば良いが, 強制関係の等号の定義により $\dot{X} \subset_p \dot{Y} \wedge \dot{Y} \subset_p \dot{Z} \to \dot{X} \subset_p \dot{Z}$ を示せば「逆方向」も同様に証明出来る. まず $p \in \mathbb{P}$ と $\langle \dot{x}, r_1 \rangle \in \dot{X}$ を固定すると $\dot{X} \subset_p \dot{Y}$ の定義により

$$D_0 = \{s : s \le r_1 \to \exists (\dot{y}, r_2) \in \dot{Y} (s \le r_2 \wedge s \Vdash \dot{x} = \dot{y})\} \text{ is dense below } p.$$

従って $q \le p$ を固定すると $s \le q$ をみたす $s \in D_0$ が存在する. 証明したいことは $\dot{X} \subset_p \dot{Z}$, 即ち

$$D_2 = \{t : t \le r_1 \to \exists \langle \dot{z}, r_3 \rangle \in \dot{Z} (t \le r_3 \wedge t \Vdash \dot{x} = \dot{z})\} \text{ is dense below } p.$$

なのであるが, そのためには $t \le s \wedge t \in D_2$ なる t の存在を示せば十分である. まず $s \not\le r_1$ のとき $s \in D_2$ は明らかなので, $s \le r_1$ と仮定し, $s \le r_2 \wedge s \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ を満たす $\langle \dot{y}, r_2 \rangle \in \dot{Y}$ を固定する. 仮定により $\dot{Y} \subset_p \dot{Z}$.

従って

$$D_1 = \{t : t \leq r_2 \to \exists\langle \dot{z}, r_3\rangle \in \dot{Z}(t \leq r_3 \wedge t \Vdash \dot{y} = \dot{z})\} \text{ is dense below } p.$$

が成立する．ところが $s \leq r_2$ なので $t \leq s, \langle \dot{z}, r_3\rangle \in Z$ で $t \leq r_3 \wedge t \Vdash \dot{y} = \dot{z}$ を満たすものが存在する．従って $t \leq s$ に注意すれば, $t \leq r_1 \wedge t \leq r_3 \wedge t \Vdash \dot{x} = \dot{y} \wedge t \Vdash \dot{y} = \dot{z}$ が成立し, 元のモデルの rank に関する帰納法により $t \leq r_1 \wedge t \leq r_3 \wedge t \Vdash \dot{x} = \dot{z}$. よって $t \in D_2$ が証明できた．

(4.4) の証明だが, まず $p \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ を仮定する．すると定義により

$$E_0 = \{q : \exists\langle \dot{z}, s\rangle \in \dot{X}(q \leq s \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{z})\} \text{ is dense below } p$$

また $p \Vdash \dot{X} = \dot{Y}$ より特に $\dot{X} \subset_p \dot{Y}$ が成立する．従って次式が成立する．

$$\forall\langle \dot{z}, s\rangle \in \dot{X}(\{q : q \leq s \to \exists\langle \dot{y}, t\rangle \in \dot{Y}(q \leq t \wedge q \Vdash \dot{z} = \dot{y})\} \text{ is dense below } p)$$

$p \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ を証明するためには

$$E_1 = \{q : \exists\langle \dot{y}, t\rangle \in \dot{Y}(q \leq t \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{y})\} \text{ is dense below } p$$

が成立すれば良い．今 $q \leq p$ を任意に選ぶと, E_0 is dense below p なる条件により $r \leq q, \langle \dot{z}, s\rangle \in \dot{X}$ が存在し $r \leq s \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{z}$ が成立する．この事実を $\dot{X} \subset_p \dot{Y}$ の条件に適用すると $r_0 \leq r, \langle \dot{y}, t\rangle \in \dot{Y}$ が存在して $r_0 \leq t \wedge r_0 \Vdash \dot{z} = \dot{y}$ が成立し, 従って $r_0 \leq t \wedge r_0 \Vdash \dot{x} = \dot{y}$. これは E_1 is dense below p を意味する．

(4.5) の証明は上の二つより容易である． □

系 4.1.1. $(p \Vdash \varphi(\dot{x}) \wedge \dot{x} = \dot{y}) \to p \Vdash \varphi(\dot{y})$

証明. 等号の基本性質と論理式の記号の数に関する帰納法による． □

系 4.1.2. $\langle \dot{x}, p\rangle \in \dot{X} \to p \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$

証明. $\langle \dot{x}, p\rangle \in \dot{X}$ を仮定する．強制関係の $\in$ の定義により $p \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ は
$D = \{q : \exists\langle \dot{y}, r\rangle \in \dot{X}(q \leq r \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{y})\}$ が dense below p となることであるが, 存在記号において $\langle \dot{y}, r\rangle = \langle \dot{x}, p\rangle$ なる実例を考え, $q \Vdash \dot{x} = \dot{x}$ に注意すれば $D = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$ である． □

5 論理式の絶対性と Δ_0-論理式

定義 5.1 (論理式の絶対性)**.** 論理式 φ は次の条件を満たすとき強制関係に関し絶対的であると言う．

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in M[\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leftrightarrow (1 \Vdash \varphi(\check{x_1}, \check{x_2}, \cdots, \check{x_n}))]$$

定義 5.2 (Δ_0-論理式)**.** 次の条件を満たす論理式を Δ_0-論理式もしくは単に Δ_0 と呼ぶ．

$$X = Y \text{ は } \Delta_0\text{-論理式} \tag{5.1}$$
$$x \in X \text{ は } \Delta_0\text{-論理式} \tag{5.2}$$
$$\varphi, \psi \text{ が } \Delta_0\text{-論理式のとき } \varphi \wedge \psi \text{ も } \Delta_0\text{-論理式} \tag{5.3}$$
$$\varphi \text{ が } \Delta_0\text{-論理式のとき } \neg\varphi \text{ も } \Delta_0\text{-論理式} \tag{5.4}$$
$$\varphi \text{ が } \Delta_0\text{-論理式のとき } \forall x \in X(\varphi(x)) \text{ も } \Delta_0\text{-論理式} \tag{5.5}$$

定理 5.1. Δ_0-論理式は強制関係において絶対的である．

証明. (5.1). まず $X = Y$ を仮定すると $M^{\mathbb{P}}$ の要素として $\check{X} = \check{Y}$. 従って強制法の等号の定義により $1 \Vdash \check{X} = \check{Y}$. 逆方向は仮定を弱め $\exists p \in \mathbb{P}(p \Vdash \check{X} = \check{Y})$ とし $x \in X$ と仮定する. 存在記号の具体例を p とすると, $\check{X} \subset_p \check{Y}$ が成立しているので, 任意の $q \in \mathbb{P}$ に対して $r \leq q$ が存在し $\exists \langle \check{y}, 1 \rangle \in \check{Y}(r \leq 1 \wedge r \Vdash \check{x} = \check{y})$. この $\langle \check{y}, 1 \rangle \in \check{Y}$ を一つ固定すると, $M^{\mathbb{P}}$ の rank に関する帰納法の仮定により $r \Vdash \check{x} = \check{y}$ から $x = y$ が導かれる. 従って $x \in Y$.

(5.2). $1 \Vdash \check{x} \in \check{X}$ は定義により $\forall p \exists q \leq p \exists \langle \check{z}, 1 \rangle \in \check{X}(q \Vdash \check{x} = \check{z})$ が成り立つということであるが, (5.1) によりこれは $\langle \check{x}, 1 \rangle \in \check{X}$ 即ち $x \in X$ と同値である.

(5.3), (5.4) は容易である.

(5.5). φ を Δ_0-論理式とする. $1 \Vdash \forall x \in \check{X}(\varphi(x))$ は定義により $\forall \check{x} \in \check{X}(1 \Vdash \varphi(\check{x}))$ のことである. ところが φ が Δ_0-論理式であることにより $x \in M$ に対し $\varphi(x) \leftrightarrow (1 \Vdash \varphi(\check{x}))$. 二番目の全称記号は $M^{\mathbb{P}}$ 上での解釈なので Δ_0-論理式の定義により $(1 \Vdash \forall x \in \check{X}(\varphi(x))) \leftrightarrow \forall x \in X(\varphi(x))$. □

定義 5.3. Δ_0-論理式 $\varphi(x)$ に対し $\exists x(\varphi(x))$ の形の論理式を Σ_1-論理式 と呼ぶ.

系 5.1.1. $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を Σ_1-論理式 とするとき $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (1 \Vdash \psi(\check{x}_1, \check{x}_2, \cdots, \check{x}_n))$

証明. Δ_0-論理式 φ に対し $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $\exists x(\varphi(x, x_1, x_2, \cdots, x_n))$ の形であるとする. x の具体例を x_0 として $\varphi(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が成立すると仮定する. φ は Δ_0-論理式 なので $1 \Vdash \varphi(\check{x}_0, \check{x}_1, \check{x}_2, \cdots, \check{x}_n)$. 従って $1 \Vdash \exists x(\varphi(x, \check{x}_1, \check{x}_2, \cdots, \check{x}_n))$. □

例 5.1. 順序数は「$\in$ に対して推移的な全順序集合」という性質で特徴づけられるので「α は順序数である」は Δ_0-論理式である.

例 5.2. 「X は整列可能である」は Σ_1-論理式である.

6 強制法と ZFC

強制関係は ZFC の公理を満たす.

定理 6.1. φ を ZFC の公理とするとき $1 \Vdash \varphi$.

系 6.1.1. φ を ZFC の定理とするとき $1 \Vdash \varphi$.

系 6.1.2. φ を論理式とする. $p \in \mathbb{P}$ が存在して $p \Vdash \varphi$ のとき φ は ZFC と矛盾しない.

証明. ZFC $+ \varphi$ が矛盾すると仮定すると ZFC $\vdash \neg\varphi$. 従って $1 \Vdash \neg\varphi$ が成立するがこれは仮定に反する. □

定理 *6.1* の証明. (存在公理). 明白である.

(対の公理). $\dot{x}, \dot{y}$ を $M^{\mathbb{P}}$ の要素とする. $\dot{X} = \{\langle \dot{x}, 1 \rangle, \langle \dot{y}, 1 \rangle\}$ とおくと $1 \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \vee \dot{y} \in \dot{X}$.

(外延性の公理). 証明すべきことは $1 \Vdash \forall X \forall Y[\forall x(x \in X \leftrightarrow y \in X) \to X = Y]$ である. 従って $\dot{X}, \dot{Y} \in M^{\mathbb{P}}$ を固定し $(p \Vdash \dot{X} \subset \dot{Y}) \to (\dot{X} \subset_p \dot{Y})$ 即ち次式を証明する.

$$\dot{X} \not\subset_p \dot{Y} \to \exists \dot{x}(p \not\Vdash (\dot{x} \in \dot{X} \to \dot{x} \in \dot{Y})) \tag{6.1}$$

(6.1) の前提条件は $\langle \dot{x}, s_0 \rangle \in \dot{X}$ が存在し $\exists q \leq p \forall r \leq q(r \leq s_0 \wedge \neg\exists \langle \dot{y}, s_1 \rangle \in \dot{Y}(r \leq s_1 \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y}))$. 先頭

の存在記号に現れる q を固定すると次式が得られる.

$$q \leq p \wedge \forall r \leq q(r \leq s_0 \wedge \neg\exists\langle\dot{y}, s_1\rangle \in \dot{Y}(r \leq s_1 \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y})) \tag{6.2}$$

ところで $\langle\dot{x}, s_0\rangle \in \dot{X}$ なので $s_0 \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ が成立し, $q \leq s_0$ であるから $q \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$. ところがもし $q \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ を仮定すると, 強制関係における $\in$ の定義により $\forall s \leq q\exists r \leq s\exists\langle\dot{y}, s_1\rangle \in \dot{Y}(r \leq s_1 \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y})$ が成立し, 特に $\exists r \leq q\exists\langle\dot{y}, s_1\rangle \in Y(r \leq s_1 \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y})$ が成り立つが, これは (6.2) に反する.

(内包の公理). φ を論理式とする. 証明すべきことは $1 \Vdash \forall X\exists Y\forall x(x \in Y \leftrightarrow x \in X \wedge \varphi(x))$ である. $\dot{X} \in M^{\mathbb{P}}$ とし $\dot{Y} = \{\langle\dot{x}, p\rangle \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \times \mathbb{P} : p \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x})\}$ とする.

まず $p \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ を仮定すると, 強制関係における $\in$ の定義により

$$\forall q \leq p\exists r \leq q\exists\langle\dot{y}, s\rangle \in \dot{Y}(r \leq s \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y})$$

が成立し, $\dot{Y}$ の定義により

$$\forall q \leq p\exists r \leq q\exists\langle\dot{y}, s\rangle \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \times \mathbb{P}(r \leq s \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y} \wedge s \Vdash (\dot{y} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{y})))$$

が成り立つ. 従って dense below p なる r に対し $r \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x})$. 即ち $p \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x})$ が成り立つ.

逆に $p \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x})$ を仮定すると

$$\forall q \leq p\exists r \leq q\exists\langle\dot{y}, s\rangle \in \dot{X}(r \leq s \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y} \wedge p \Vdash \varphi(\dot{x}))\}$$

が成立し $\dot{Y}$ の定義により上の条件を満たす r に対して $\langle\dot{x}, r\rangle \in \dot{Y}$. 従って $r \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$. このような r は dense below p だけ存在するので $p \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$.

(合併の公理). 証明すべきことは $1 \Vdash \forall X\exists Y\forall x(\exists u(u \in X \wedge x \in u) \rightarrow x \in Y)$ である.

$\dot{X} \in M^{\mathbb{P}}$ に対し $\dot{Y} = \bigcup \mathrm{dom}(\dot{X})$ とする. 今 $p \in \mathbb{P}, \dot{x}, \dot{u} \in M^{\mathbb{P}}$ が $p \Vdash \dot{u} \in \dot{X} \wedge p \Vdash \dot{x} \in \dot{u}$ を満たすと仮定する. $p \Vdash \dot{u} \in \dot{X}$ より dense below p なる q に対して $\exists\langle\dot{v}, r\rangle \in \dot{X}(q \leq r \wedge q \Vdash \dot{u} = \dot{v})$ が成立する. $\langle\dot{v}, r\rangle$ を (q に依存して) 固定すると $\dot{v} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge q \Vdash \dot{u} = \dot{v}$. 従って $\dot{v} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge q \Vdash \dot{v} \in \dot{X}$.

一方 $p \Vdash \dot{x} \in \dot{u}$ より $q \Vdash \dot{x} \in \dot{v}$ が成立する. 従って $\exists\langle\dot{y}, t\rangle \in \dot{v}(s \leq t \wedge s \Vdash \dot{x} = \dot{y})$ が dense below q なる s に対し成立する. $\langle\dot{y}, t\rangle \in \dot{v}$ (従って $\langle\dot{y}, t\rangle \in \dot{Y}$) を ($s$ に依存して) 固定すると $s \Vdash \dot{x} = \dot{y} \wedge s \Vdash \dot{y} \in \dot{Y}$. 従って $s \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$. このような s は dense below p なので $p \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ が成立する.

(無限公理). 集合 S が帰納的 (inductive) であるとは $\emptyset \in S \wedge \forall x \in S(x \cup \{x\} \in S)$ を満たすことなので Δ_0-論理式で表現できる. 従って $1 \Vdash$ ($\check{\omega}$ は帰納的).

(巾集合の公理). 証明すべき論理式は $1 \Vdash \forall X\exists Z\forall Y(Y \subset X \rightarrow Y \in Z)$ である.

$\dot{X} \in M^{\mathbb{P}}$ に対し $S = \{\dot{U} \in M^{\mathbb{P}} : \mathrm{dom}(\dot{U}) \subset \mathrm{dom}(\dot{X})\}$ とし $\dot{Z} = S \times \{1\}$ とする. さらに $p \Vdash \dot{Y} \subset \dot{X}$ を仮定し $\dot{Y}_0 = \{\langle\dot{y}, q\rangle : \dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge q \Vdash \dot{y} \in \dot{Y}\}$ とする. 明らかに $\dot{Y}_0 \in S$ が成立するので $\langle\dot{Y}_0, 1\rangle \in \dot{Z}$. 従って $p \Vdash \dot{Y}_0 \in \dot{Z}$ が成り立つ.

ゆえに $p \Vdash \dot{Y}_0 = \dot{Y}$ を示せば良いが, すでに強制関係で外延性の公理が成り立つことは分かっているので, 今までと同様の手法で容易に証明出来る.

(置換公理). φ を論理式とする. 置換公理よりやや強い下記を証明する.

$$1 \Vdash (\forall x\exists y(\varphi(x, y)) \rightarrow \forall X\exists Y\forall x(x \in X \rightarrow \exists y(y \in Y \wedge \varphi(x, y)))) \tag{6.3}$$

$\dot{X} \in M^{\mathbb{P}}$ とする. このとき M の置換公理により $Z \in M, Z \subset M^{\mathbb{P}}$ が存在し

$$(\forall\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X})\forall p \in \mathbb{P}\exists\dot{y} \in M^{\mathbb{P}}(p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y})) \rightarrow (\exists\dot{y} \in Z(p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}))))$$

を満たす．$\dot{Y} = Z \times \{1\} \in M^{\mathbb{P}}$ とし $p \Vdash \forall x \exists y (\varphi(x, y))$ を仮定する．このとき $\forall \dot{x} \in M^{\mathbb{P}} (p \Vdash \exists y (\varphi(\dot{x}, y))$ が成立する．従って $\forall \dot{x} \in M^{\mathbb{P}} \exists \dot{y} \in M^{\mathbb{P}} (q \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}))$, 即ちさらに弱い $\forall \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \exists \dot{y} \in M^{\mathbb{P}} (q \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}))$ が dense below p を満たす $q \leq p$ に対して成り立ち, 従って $\forall \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \exists \dot{y} \in Z (q \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}))$ が成立する．

今 $r \leq q$ に対し $r \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ を仮定する．このとき強制法の $\in$ の定義により dense below r である s に対し $\exists \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) (s \Vdash \dot{z} = \dot{x})$ が成立することが分かる．$s, \dot{z}$ を固定すると $s \Vdash \dot{z} \in \dot{X}$．従って $\dot{y} \in Z$ が存在して $s \Vdash \varphi(\dot{z}, \dot{y})$．よって $s \Vdash (\dot{y} \in \dot{Y} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{y}))$ が成立し, s の選び方に注意すれば $r \Vdash (\dot{y} \in \dot{Y} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{y}))$.

(選択公理)．任意の $\dot{X} \in M^{\mathbb{P}}$ に対し $1 \Vdash (\dot{X}$ 上に整列順序が存在する$)$ ことを示す．

$Y = \mathrm{dom}(\dot{X})$ を元のモデル M の要素と考え $\dot{f} = \{\langle \check{y}, y \rangle^{\mathbb{P}} : y \in Y\} \times \{1\}$ とおく．ここで $\langle \check{y}, y \rangle^{\mathbb{P}}$ は強制関係で対を表現する名称とする．このとき任意の $p \in \mathbb{P}$ に対し次の事実が成立する．

$$p \Vdash \dot{f} \text{ is a function from } \check{Y} \text{ onto } \mathrm{ran}(\dot{f})$$
$$p \Vdash \dot{X} \subset \mathrm{ran}(\dot{f})$$

ところが「X 上に整列集合が存在する」は Σ_1-論理式 なので p は $\check{Y}$ 上の整列順序の存在を強制する．さらに強制関係における $\mathrm{ran}(\dot{f})$ 上の整列順序は $\dot{z} \in \mathrm{ran}(\dot{f})$ に対し $\dot{f}^{-1}(\{\dot{z}\}) \subset \check{Y}$ の最小元の「順序」を割り当てることにより得られる．従って $1 \Vdash (\dot{X}$ 上に整列順序が存在する$)$ が成立する．

(正則の公理)．証明すべき論理式は $1 \Vdash \forall X (X \neq \emptyset \to \exists x (x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$.

成立しないと仮定すると $p \in \mathbb{P}$ が存在して $p \Vdash \exists X (X \neq \emptyset \wedge \forall x (x \in X \to x \cap X \neq \emptyset))$．従って $q \leq p$ と $\dot{X} \in M^{\mathbb{P}}$ が存在して $q \Vdash (\dot{X} \neq \emptyset \wedge \forall x (x \in \dot{X} \to x \cap \dot{X} \neq \emptyset))$ が成立する．ここで空でないクラス
$C = \{\dot{x} \in M^{\mathbb{P}} : \exists r \leq q (r \Vdash \dot{x} \in \dot{X}\}$) を考える．

C の rank 最小の要素を $\dot{x}$ とし $r \leq q$ が $r \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ を満たすと仮定する．このとき $r \Vdash (\dot{x} \cap \dot{X} \neq \emptyset)$ が成立することと $M^{\mathbb{P}}$ の推移性により, $s \leq r$ と $\dot{z} \in \dot{x}$ が存在し $s \Vdash \dot{z} \in \dot{X}$ が成立する．従って $\dot{z} \in C$ となるがこれは $\mathrm{rank}(\dot{x})$ の最小性に反する． □

7 Generic の標準名称

$\mathbb{P}$ を半順序集合とする．$\mathbb{P}$-Generic の標準名称 $\dot{G}$ を次のように定義する．

定義 7.1 ($\mathbb{P}$-Generic の標準名称)**.**

$$\dot{G} = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\} \tag{7.1}$$

定理 7.1 ($\mathbb{P}$-Generic 標準名称の性質)**.** $\dot{G}$ は強制関係において $\mathbb{P}$-*Generic* である．即ち

$$1 \Vdash \dot{G} \subset \check{\mathbb{P}} \tag{7.2}$$
$$1 \Vdash \dot{G} \textit{ is a filter on } \check{\mathbb{P}} \tag{7.3}$$
$$1 \Vdash [(\dot{D} \in \check{M} \wedge \dot{D} \subset \check{\mathbb{P}} \wedge \dot{D} \textit{ is dense in } \check{\mathbb{P}}) \to \dot{G} \cap \dot{D} \neq \emptyset] \tag{7.4}$$

証明．まず次の事実に注意する．

$$(p \Vdash \dot{X} \in \check{M}) \leftrightarrow (\forall q \leq p \exists r \leq q \exists Y \in M (r \Vdash \dot{X} = \check{Y}))$$
$$(p \Vdash \check{q} \in \dot{G}) \leftrightarrow \forall r \leq p \exists s \leq r (r \leq q)$$

(7.2) を証明するには $p \Vdash \dot{x} \in \dot{G} \to p \Vdash \dot{x} \in \check{\mathbb{P}}$ を示せば良いが, これは $\dot{G}$ の定義と強制関係における $\in$ の定義, 強制関係での等号の性質によりすぐに分かる．

(7.3) を証明するためまず $r \Vdash \check{p} \in \dot{G} \wedge \check{p} \le \check{q}$ を仮定する[*5]．すると上の注意により $r \Vdash \check{q} \in \dot{G}$ が導かれる．

次に $r \Vdash \check{p} \in \dot{G} \wedge \check{q} \in \dot{G}$ を仮定する．やはり上の注意により $\forall s \le r \exists t \le s(t \le p)$, $\forall s \le r \exists t \le s(t \le q)$ が成立する．言い換えると $D_0 = \{t \in \mathbb{P} : t \le p\}$, $D_1 = \{t \in \mathbb{P} : t \le q\}$ はともに dense below r．今 $s \le r$ を任意に取ると D_0 が dense below r であることにより $t_0 \le s$, $t_0 \le p$ なる t_0 が存在する．ところが $t_0 \le r$ でもあるので $t_1 \le t_0$ が存在して $t_1 \le q$．従って $t_1 \Vdash \check{t_1} \in \dot{G} \wedge \check{t_1} \le \check{p} \wedge \check{t_1} \le \check{q}$．すなわち
$t_1 \Vdash \exists t \in \dot{G}(t \le \check{p} \wedge t \le \check{q})$．このような t_1 は dense below t_0 存在するので dense below r だけとれる．従って $r \Vdash \exists t \in \dot{G}(t \le \check{p} \wedge t \le \check{q})$.

最後に (7.4) であるが, 注意 7.1 と任意の $d \in D$ に対し $d \Vdash \check{d} \in \dot{G} \wedge \check{d} \in \check{D}$ 即ち $d \Vdash \dot{G} \wedge \check{D} \ne \emptyset$ であることにより証明出来る． □

注意 7.1. 実は *(7.3)* の証明には少々問題がある．最初から強制関係において $\dot{G}$ の要素を $\check{p}$ の形に限定してあることと, $\dot{G}$ 上の順序関係をきちんと定義していないからである．*(7.2)* により $r \Vdash \dot{x} \in \dot{G}$ が成立する場合 $r \Vdash \dot{x} \in \mathbb{P}$ が成り立つ．従って上の注意により $\forall s \le r \exists t \le s \exists p \in \mathbb{P}(t \Vdash \dot{x} = \check{p})$ が成立する．従って *(7.3)* の証明と同様に $r \Vdash \dot{x} \in \dot{G} \wedge \dot{y} \in \dot{G}$ が成立する場合, *dense below* r な $t \in \mathbb{P}$ に対し, 具体的な $p, q \in \mathbb{P}$ が存在し, $t \Vdash \dot{x} = \check{p} \wedge \dot{y} = \check{q}$ が成立する．また $\dot{G}$ の強制関係における半順序はもともとの $\mathbb{P}$ の半順序構造の標準名称を強制関係において $\dot{G}$ に制限したものとする．このとき *(7.3)* の証明はここで記述した t による強制に関して行われ, これらが *dense below* r なので r の強制に関しても成立するという事実により正当化される．

8 Generic 拡大

本節は証明を省略した．さらに内容に関しても以降の節では使用しない．

一般に M の半順序集合 $\mathbb{P}$ に対し, $\mathbb{P}$-Generic が存在するとは限らないのであるが、本節では存在を仮定し議論を進める．ただし $G \in M$ の場合は自明な結果しか得られないので, $G \notin M$ と仮定する．その前提として $M \subset N$ である集合論の推移的モデルが存在し, 最初から $G \in N$ であるとする．

定義 8.1 (Generic 拡大)**.** M を集合論の推移的なモデルとし $\langle \mathbb{P}, \le, 1 \rangle \in M$ を半順序集合とする．$\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ の $\mathbb{P}$-*Generic* G による解釈を次のように定義する．

$$\dot{x}^G = \{\dot{y}^G : \exists p \in G(\langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x})\}$$

そして M の G による Generic-拡大 $M[G]$ の定義は次の通りである．

$$M[G] = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}$$

定理 8.1. $x \in M$ とするとき $\check{x}^G = x$．従って $M \subset M[G]$ と考えることが可能である．

証明. $\check{x}^G = \{\dot{y}^G : \exists p \in G(\langle \dot{y}, p \rangle \in \check{x})\} = \{\check{y}^G : \exists p \in G(\langle \check{y}, 1 \rangle \in \check{x})\} = \{\check{y}^G : y \in x\} = x$．最後の等号は M の要素の rank に関する帰納法による． □

次の定理は Generic 拡大と強制法との関係を明らかにする．

定理 8.2 (Generic 拡大の基本定理)**.**

$$M[G] \vDash \varphi(\dot{x}_1^G, \dot{x}_2^G, \cdots, \dot{x}_n^G) \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)) \tag{8.1}$$

[*5] 11 ページ注意 7.1 参照のこと．

証明. $M^{\mathbb{P}}$ での rank による帰納法による. また定義により $M[G]$ は推移的なので外延性の公理が成立することに注意する. $x \in X$, $X = Y$ の場合に証明すれば良いことはほとんど明らかである.

最初に $\dot{x}^G \in \dot{X}^G$ を仮定する. 定義により, $\exists p \in G(\langle \dot{x}, p \rangle \in \dot{X})$ が成り立つので $\exists p \in G(p \Vdash \dot{x} \in \dot{X})$.

次に $\exists p \in G(p \Vdash \dot{x} \in \dot{X})$ を仮定する. $p \in G$ を一つ選ぶと $\{q : \exists \langle \dot{y}, r \rangle \in \dot{X}(q \leq r \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{y})\}$ が dense below p. 従って $q \in G, q \leq r$ が存在し $q \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ が成り立つが, 明らかに $r \in G$ である. 帰納法の仮定により $\dot{x}^G = \dot{y}^G$. また定義により $\dot{y}^G \in \dot{X}^G$ が成立し, 従って $\dot{x}^G \in \dot{X}^G$.

等号の方であるが, まず $\dot{X}^G \subset \dot{Y}^G$ を仮定し, $\neg\exists p \in G(p \Vdash \dot{X} \subset \dot{Y})$ を仮定すると論理式の変形により $\forall p \in G(p \nVdash \dot{X} \subset \dot{Y})$. 今, 一般の論理式 φ と $p \in G$ に対し $D_p = \{q \leq p : q \Vdash \varphi \vee q \Vdash \neg\varphi\}$ を考えると D_p は dense below p である. 従って $G \cap D_p \neq \emptyset$ が得られるが, もし $\forall q \in G(q \nVdash \varphi)$ が成立していれば, $q \in G$ が存在して $q \Vdash \neg\varphi$ である. よって, 今の場合に適用すると $q \in G$ で $q \Vdash \dot{X} \not\subset \dot{Y}$ を満たすものが存在するが, これは $q \Vdash \exists x(x \in \dot{X} \wedge x \notin \dot{Y})$ を意味する. すると $r \in G, r \leq q, \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ で $r \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \wedge \dot{x} \notin \dot{Y}$ を満たすものが存在するが, これは $\dot{x}^G \in \dot{X}^G \wedge \dot{x}^G \notin \dot{Y}^G$ を意味し矛盾である.

最後に等号の逆方向であるが $\exists p \in G(p \Vdash \dot{X} \subset \dot{Y})$ を仮定し $\dot{x}^G \in \dot{X}^G$ とする. すると定義により $\exists q \in G(\langle \dot{x}, q \rangle \in \dot{X})$. 従って $q \in G$ が存在し $q \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$. $p, q \in G$ なので $r \leq p, r \leq q$ を満たす $r \in G$ が存在し $r \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ となり $\dot{x}^G \in \dot{Y}^G$. □

系 8.2.1. *$M[G]$ は ZFC のモデルである.*

証明. φ を論理式とするとき $(\mathrm{ZFC} \vdash \varphi) \to (1 \Vdash \varphi) \to (M[G] \models \varphi)$ □

さらに Generic 拡大に関して次の性質が成り立つ.

定理 8.3.

$$M \subset M[G]. \tag{8.2}$$

$$N \text{ を } M \subset N \text{ 満たす集合論の推移的なモデルとし } G \in N \text{ であると仮定する.このとき } M[G] \subset N. \tag{8.3}$$

$$\mathrm{Ord}(M[G]) = \mathrm{Ord}(M). \tag{8.4}$$

証明に関しては [1], [2] を参照されたい. だたし (8.4) に関しては強制法の言葉を用い次節で証明する.

9 連続体仮説の ZFC からの独立性

本節では「連続体仮説は ZFC と独立である」事実の証明を記述する[*6].

6.1.2 により 連続体仮説を否定する論理式が, 適当な半順序集合 $\mathbb{P}$ の要素による強制で成り立つことを示せば良い. 最初に次の重要な事実を証明する.

定理 9.1 (強制関係での順序数の保存)**.** もとのモデルと強制関係で順序数は一致する. すなわち $\mathrm{Ord}(M)$ を M の順序数全体のクラスとすると次の事実が成立する.

$\alpha \in \mathrm{Ord}(M)$ とするとき $p \Vdash (\check{\alpha}$ *is an ordinal*$)$. 逆に $p \Vdash (\dot{x}$ *is an ordinal*$)$ が成立するとき $\exists \alpha \in \mathrm{Ord}(M)(p \Vdash \dot{x} = \check{\alpha})$. *Generic* 拡大の言葉で記述すれば $\mathrm{Ord}(M[G]) = \mathrm{Ord}(M)$ である.

証明. 論理式「α は順序数である」は Δ_0 なので $p \Vdash (\check{\alpha}$ is an ordinal$)$.

[*6] もちろんゲーデルによる「連続体仮説は ZFC と矛盾しない」なる事実と合わせてという意味である.

逆に $p \Vdash (\dot{x}$ is an ordinal) を仮定する．$A = \{\alpha \in \mathrm{Ord}(M) : \exists q \le p(q \Vdash \check{\alpha} \in \dot{x})\}$ とおくと $A \in M$ は順序数からなる集合である．ところが rank に関する帰納法により任意の $q \le p$ に対し
$q \Vdash \dot{y} \in \dot{x} \to \exists \alpha \in \mathrm{Ord}(M)(q \Vdash \dot{y} = \check{\alpha})$. 従って $q \Vdash (\dot{y} \in \dot{x}) \to q \Vdash (\dot{y} \in \check{A})$ が成立し $p \Vdash \dot{x} \subset \check{A}$. A は順序数からなる集合なので $A \subset \beta$ なる順序数 β が存在し $p \Vdash \dot{x} \in \check{\beta} \vee \dot{x} = \check{\beta}$. いずれの場合も結論が成りたつ． □

M を集合論の推移的なモデル, λ を非可算基数とし, $\mathbb{P} \in M$ を次のように定義する．

$$\mathbb{P} = \{p : p \text{ は } \lambda \times \omega \text{ の有限部分集合から } 2 \text{ への関数 }\}$$

$\mathbb{P}$ 上の順序は $p \le q \leftrightarrow q \subset p$ により定義する．$\dot{G}$ を $\mathbb{P}$-Generic の標準名称とし $\dot{f}$ を $1 \Vdash \dot{f} = \bigcup \dot{G}$ を満たす名称とする[*7]．このとき次の事実が成立する．

定理 9.2.

$$1 \Vdash \dot{f} \textit{ is a function from a subset of } \check{\lambda} \times \check{\omega} \textit{ to } 2 \tag{9.1}$$

$$1 \Vdash \mathrm{dom}(\dot{f}) = \check{\lambda} \times \check{\omega} \tag{9.2}$$

$\dot{f}_\alpha$ を $p \Vdash \forall \alpha < \lambda \forall n \in \omega(\dot{f}_\alpha(n) = \dot{f}(\alpha, n))$ を満たす名称とするとき

$$p \Vdash \mathrm{dom}(\dot{f}_\alpha) = \check{\omega} \tag{9.3}$$

$$p \Vdash \forall \alpha, \beta < \lambda(\alpha \ne \beta \to \dot{f}_\alpha \ne \dot{f}_\beta) \tag{9.4}$$

証明. (9.1). 強制関係において $\dot{G}$ がフィルターであることの帰結である．

(9.2). $\alpha < \lambda, n \in \omega$ に対し $D_{\alpha,n} = \{p \in \mathbb{P} : \langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{dom}(p)\}$ とおくと $D_{\alpha,n} \in M$ が成立し $D_{\alpha,n}$は $\mathbb{P}$ で稠密なことは容易に分かる．従って $1 \Vdash \dot{G} \cap \check{D}_{\alpha,n} \ne \emptyset$ が成立し, これは $1 \Vdash \mathrm{dom}(\dot{f}) = \check{\lambda} \times \check{\omega}$ を意味する．

(9.3). (9.2) より直ちに得られる．

(9.4). $\alpha, \beta < \lambda, \alpha \ne \beta$ に対し $E_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega(p(\alpha, n) \ne p(\beta, n))\}$ と定義すれば
$E_{\alpha,n} \in M$ であることと $E_{\alpha,n}$ が $\mathbb{P}$ で稠密であることが直ちに得られる．従って $p \Vdash \dot{G} \cap \check{E}_{\alpha,n} \ne \emptyset$ が導かれ, これは (9.4) が成立することを意味する． □

強制関係において定理 (9.2) の $\dot{f}_\alpha$ は ω から 2 への関数なので, $\alpha < \lambda$ に対しすべて相異なる実数と解釈可能である．従って $1 \Vdash |\check{\lambda}| \le |2^{\aleph_0}|$ が成立する．λ は任意の非可算基数であったので「連続体仮説は ZFC と独立である」ことが証明できた気分になるが, 一般に論理式「λ は基数である」「$|X| = |Y|$」等は強制関係において絶対的ではない．今のところ上記 λ は強制関係で基数になるとは限らないし, 仮に基数になったとしても $1 \Vdash \check{\lambda} = \aleph_0, 1 \Vdash \check{\lambda} = \aleph_1$ が成立する可能性もありうる．

例 9.1. λ を任意の無限基数とする．$\mathbb{Q} = \{q : q \text{ は } \omega \text{ の有限部分集合から } \lambda \text{ への関数 }\}$ として $\dot{G}$ を $\mathbb{Q}$-*Generic* の標準名称とする．さらに $\mathbb{Q}$-名称 $\dot{f}$ は $1_{\mathbb{Q}} \Vdash \dot{f} = \bigcup \dot{G}$ を満たすものとする．このとき次の事実が成立する．

$$1_{\mathbb{Q}} \Vdash (\dot{f} \text{ は } \check{\omega} \text{ から } \check{\lambda} \text{ への関数}) \tag{9.5}$$

$$1_{\mathbb{Q}} \Vdash \mathrm{ran}(\dot{f}) = \check{\lambda} \tag{9.6}$$

(9.6) は $\alpha < \lambda$ に対し $D_\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \exists n \in \omega(q(n) = \alpha)\}$ とすれば *(9.2)* と同様に証明できる．

従って $1_{\mathbb{Q}} \Vdash |\check{\lambda}| = \aleph_0$ が成立する．

---

*7 この仮定は付録 10.1 に記載した極大原理を仮定しないと成立しない．極大原理を使わない場合 $p \Vdash \dot{f} = \bigcup \dot{G}$ と仮定を書き直し, その後の p を $q \le p$ と置き換え推論を進めれば良い．極大原理は非常に重要な定理であるにもかかわらず, 証明自体はそれほど難しくないので, ぜひきちんと理解して欲しい．

本節の後半では定理 9.2 における半順序集合 $\mathbb{P}$ の要素による強制では「基数の絶対性」が成立することを示し、連続体仮説の否定は ZFC と矛盾しないことの証明を終える.

定義 9.1. 半順序集合 $\mathbb{P}$ が *c.c.c(countable chain condition)* を満たすとは, $\mathbb{P}$ の任意の反鎖 *(antichain)* が可算であること.

定義 9.2. $\mathcal{F}(X,Y) = \{p : p \text{ is a function from a finite subset of } X \text{ into } Y\}$. 順序は $p \le q \leftrightarrow q \subset p$ により導入する.

定理 9.3. Y が可算であるとき $\mathbb{P} = \mathcal{F}(X,Y)$ は *c.c.c* を満たす.

証明. $(p_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ を $\mathbb{P}$ の非可算な antichain と仮定する. このときデルタシステムレンマにより非可算な $\kappa < \lambda$ と有限集合 r が存在し $\forall \alpha, \beta < \kappa(\alpha \ne \beta \to \mathrm{dom}(p_\alpha) \cap \mathrm{dom}(p_\beta) = r)$ が成立する. ところが Y が可算であることにより非可算個の (p_α) は r 上で一致し, 従ってこれらは compatible となり矛盾である. □

定理 9.4 (強制関係での基数の保存)**.** Y が可算のとき $\mathbb{P} = \mathcal{F}(X,Y)$ の要素による強制関係で論理式「κ は基数である」は保存される.

以降 $\mathbb{P}$ は Y が可算である場合の $\mathcal{F}(X,Y)$ のこととする. また単に「強制関係」と記述し場合 $\mathbb{P}$ の要素によるものとする. さらに $p \Vdash \varphi$ 等の記述では 暗黙に $p \in P$ を仮定する.

補題 9.4.1. $\alpha \in M$ を順序数とする. $p \Vdash (\check{\alpha}$ *is a cardinal*$)$ のとき α は M で基数.

証明. $\alpha \in M$ が基数でないと仮定する. このとき $\alpha < \beta$ と上への関数 $f : \alpha \to \beta$ が存在する. 従って $p \Vdash (\check{f} : \check{\alpha} \to \check{\beta}$ は上への関数$)$ が成立し矛盾である. □

補題 9.4.2. $\kappa \in M$ を正則基数とするとき $p \Vdash (\check{\kappa}$ は正則基数$)$ [*8].

証明. $\kappa \in M$ を正則基数とし $p \Vdash (\kappa$ は非正則な順序数$)$ と仮定する. このとき順序数 $\gamma < \kappa$ と名称 $\dot{f}$ が存在し $p \Vdash (\dot{f}$ is an unbounded function from $\check{\gamma}$ to $\check{\kappa})$ が成り立つ.

今 $\alpha < \gamma$ に対し $A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \le p(q \Vdash \check{\beta} = \dot{f}(\check{\alpha}))\}$ とすると $A_\alpha \in M$ が成立する. ここで任意の $q \le p$ を固定し $q \Vdash \dot{y} = \dot{f}(\check{\alpha})$ を仮定する. $q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) \in \check{\kappa}$ なので dense below q なる r に対し $\beta < \kappa$ が存在し $r \Vdash \dot{y} = \check{\beta}$. 従って $r \Vdash \dot{f}(\alpha) \in \check{A}_\alpha$. $q \le p$ は任意だったので $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) \in \check{A}_\alpha$.

ここで $B = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ とすると $B \in M$ で $p \Vdash (\check{B}$ is an unbounded subset of $\check{\kappa})$ が成立するので B は κ の非有界部分集合となる.

ところが A_α の各要素 β に対し, 要素となる条件を成立させる $q \le p$ を「選択」すると, これらはすべて incompatible となる[*9]. 従って定理 9.3 により $|A_\alpha| \le \aleph_0$ が成立し $|B| = |\gamma| < \kappa$ となるが, これは κ が正則基数であることに反する. □

補題 9.4.3. $\mathbb{P}$ の要素による強制関係で *cofinality* は保存される.

証明. まず一般に極限順序数 α と順序数 β に対し真増加 cofinal 関数 $f : \alpha \to \beta$ が存在する場合 $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$ であることに注意する.

[*8] この補題の証明は強制関係における対象が元のモデルから「ぼんやり見える」という雰囲気を良く表している.
[*9] p が選択された場合 $|A_\alpha| = 1$ である.

M の順序数 α, β に対し, β は極限順序数であり $\alpha = \mathrm{cf}(\beta)$ が成立していると仮定する. このとき α は正則基数であり, 真増加 cofinal 関数 $f : \alpha \to \beta$ が存在する. 従って $p \Vdash (\check{f} : \check{\alpha} \to \check{\beta}$ は真増加 cofinal 関数) が成立するが (9.4.2) により $p \Vdash$ ($\check{\alpha}$ は正則基数) が成り立ち $p \Vdash \mathrm{cf}(\check{\alpha}) = \check{\alpha}$. 上の注意により $p \Vdash \check{\alpha} = \mathrm{cf}(\check{\beta})$. β が極限順序数でない場合は明らかである. □

定理 *9.4* の証明. 正則基数の場合は (9.4.2) による. 極限基数の場合は正則基数の極限になるのでやはり定理は成り立つ. □

10 付録

10.1 極大原理 (maximal principle)

極大原理 (maximal principle) とは次の定理である.

定理 10.1 (極大原理)**.** *M を集合論の推移的なモデルとし, $\mathbb{P} \in M$ を半順序集合, φ を論理式とする. このとき $p \in \mathbb{P}$ に対し $(p \Vdash \exists x \varphi(x)) \to \exists \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}(p \Vdash \varphi(\dot{x}))$.*

本定理は強制関係における存在記号の基本性質に比べはるかに強い事実が成立することを述べている. 証明は $q \leq p, q \Vdash \varphi(\dot{x})$ を満たす q に依存した $\dot{x}$ を, $\mathbb{P}$ で存在条件を満たす反鎖 (antichain) に沿って「張り合わせる」ことにより行われる.

補題 10.1.1. *$A \subset \mathbb{P}, A \in M$ を反鎖とし, 各 $p \in A$ に対し $\dot{X}_p \in M^{\mathbb{P}}$ が対応しているものとする. このとき $\dot{Z} \in M^{\mathbb{P}}$ が存在し $\forall p \in A(p \Vdash \dot{Z} = \dot{X}_p)$ を満たす.*

証明. $\dot{Z} = \bigcup_{p \in A} \{\langle \dot{z}, r \rangle : r \leq p \wedge r \Vdash (\dot{z} \in \dot{X}_p)\}$ とする. まず $p \in A$ に対し $p \Vdash \dot{X}_p \subset \dot{Z}$ を証明する. そのため $q \leq p$ に対し $q \Vdash \dot{x} \in \dot{X}_p$ を仮定する. すると強制関係における $\in$ の定義により
$\{t \leq q : \exists \langle \dot{z}, r \rangle \in \dot{X}_p : t \leq r \wedge t \Vdash \dot{z} = \dot{x}\}$ は dense below q. 従って任意の $s \leq q$ に対し $t \leq s, \langle \dot{z}, r \rangle \in \dot{X}_p$ が存在し $t \leq r \wedge t \Vdash \dot{z} = \dot{x}$ が成り立つ. このとき定義より明らかに $\langle \dot{z}, t \rangle \in \dot{Z}$ なので $t \Vdash \dot{x} \in \dot{Z}$. 従って $q \Vdash \dot{x} \in \dot{Z}$ が成り立つ.

次に $p \in A$ に対し $p \Vdash \dot{Z} \subset \dot{X}_p$ を証明する. $q \leq p$ に対し $q \Vdash \dot{x} \in \dot{Z}$ を仮定すると上の証明と同様に, dense below q である t に対し $\langle \dot{z}, r \rangle \in \dot{Z}$ が存在し $t \leq r \wedge t \Vdash \dot{z} = \dot{x}$ を満たす. ここで $s \in A$ に対し $r \leq s \wedge r \Vdash \dot{z} \in \dot{X}_s$ とすると $t \leq s, t \leq p$ なので s, p は compatible. A は antichain だったので $s = p$. これより容易に $t \Vdash \dot{x} \in \dot{X}_p$ を得る. □

極大原理の証明. φ を論理式とし $p \in \mathbb{P}$ に対し $p \Vdash \exists x(\varphi(x))$ が成立していると仮定する. Zorn の補題により次の条件を満たす $p \in \mathbb{P}$ からなる $\mathbb{P}$ の部分集合で極大なものを $A \in M$ とする.

$$A \text{ is an antichain.} \tag{10.1}$$

$$\forall q \in A(q \leq p \wedge \exists \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \varphi(\dot{x})) \tag{10.2}$$

M での選択公理により各 $q \in A$ に対し $q \Vdash (\varphi(\dot{x}_q))$ を満たす $(\dot{x}_q)_{q \in A}$ を選び出すと, 上の補題により $q \Vdash \dot{z} = \dot{x}_q$ を満足する $\dot{z} \in M^{\mathbb{P}}$ が存在し $\forall q \in A(q \Vdash \varphi(\dot{z}))$ が成立する.

$p \nVdash \varphi(\dot{z})$ と仮定すると $r \leq p$ が存在して $r \Vdash \neg\varphi(\dot{z})$. 今 $s \leq r$ を仮定し, さらに $s \in A$ が成立すると $s \Vdash \dot{z} = \dot{x}_s$ なので $s \Vdash \varphi(\dot{z})$ が成り立ち矛盾である. 従って $s \leq r$ のとき $s \notin A$.

一方 $p \Vdash \exists x(\varphi(x))$ が成立しているので, $s \leq r$ が存在し $\exists \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}(s \Vdash \varphi(\dot{x}))$ が成り立つ. ところが $q \in A$ に対し $q \Vdash \varphi(\dot{z}) \wedge s \Vdash \neg\varphi(\dot{z})$ が成立し q, s は incompatible. $q \in A$ は任意なので $A \cup \{s\}$ は (10.1), (10.2) の条件を満たすが, これは A の極大性に反する. □

10.2 デルタシステムレンマ

集合 X は r が存在し $\forall x, y \in X(x \neq y \to x \cap y = r)$ を満たすとき root が r であるデルタシステムであると呼ぶ*10. デルタシステムレンマとは次の定理である.

定理 10.2 (デルタシステムレンマ)**.** X を有限集合からなる非可算集合とする. このとき非可算な $Y \subset X$ が存在し Y はデルタシステムである.

証明は [1], もしくは $|X| = \omega_1$ の場合のみの証明については [2] を参照されたい.

10.3 反映の原理

反映の原理 (reflection principle) とは次の事実である.

定理 10.3 (反映の原理)**.** $M_0 \neq \emptyset$ を集合とし $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ を有限個の公理とする. このとき推移的な集合 $M_0 \subset M$ が存在し $M \vDash \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ が成り立つ. さらに M は $|M| \leq |M_0|\aleph_0$ を満足するようにとれる.

証明は [1], [2] を参照されたい.

参考文献

[1] Kenneth. Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathem atics, North-Holland, 1980.

[2] Thomas. Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2002.

*10 $r = \emptyset$ でも良い.